

KRITICKÁ MÍSTA MATEMATIKY ZÁKLADNÍ ŠKOLY V ŘEŠENÍCH ŽÁKŮ

NAĎA VONDROVÁ, MIROSLAV RENDL A KOL.

KAROLINUM



Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků

Nad'a Vondrová, Miroslav Rendl a kol.

Recenzovaly: doc. PaedDr. Jana Coufalová, CSc.
prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Vydala Univerzita Karlova,
Nakladatelství Karolinum
www.karolinum.cz
Grafická úprava Jan Šerých
Sazba DTP Nakladatelství Karolinum
Vydání první

© Univerzita Karlova, 2015
© Nad'a Vondrová, Miroslav Rendl, Radka Havlíčková,
Lenka Hříbková, Anna Páchová, Jana Žalská, 2015

Kniha vznikla v rámci projektu GAČR P407/11/1740,
Kritická místa matematiky na základní škole, analýza
didaktických praktik učitelů.

ISBN 978-80-246-3234-6
ISBN 978-80-246-3252-0 (online : pdf)



Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum 2017

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

OBSAH

1. Vybraná kritická místa matematiky – zkoumání žákovských obtíží

(Nad'a Vondrová a Miroslav Rendl)	11
1.1 Tři zdroje výzkumu prezentovaného v kapitolách knihy	12
1.2 Cíl a metody výzkumu	13
1.3 Metodologie.	15
1.3.1 Výběr témat a tvorba úloh	15
1.3.2 Zaškolení tazatelů	16
1.3.3 Výběr žáků	17
1.3.4 Sběr dat.	19
1.3.5 Analýza dat	20
1.4 Zpracování a struktura knihy	21
1.5 Omezení výzkumu	24
1.6 Shrnutí	25

2. Slovní úlohy jako kritické místo matematiky 1. stupně základní školy

(Radka Havlíčková, Lenka Hříbková a Anna Páchová)	27
2.1 Teoretický rámec a související výzkum	28
2.1.1 Slovní úlohy: vymezení, fáze řešení a typologie	28
2.1.2 Řešitelské strategie a chyby žáků při řešení slovních úloh	31
2.1.3 Kognitivní charakteristiky žáků	33
2.2 Slovní úlohy v české škole a obtíže českých žáků	35
2.2.1 Slovní úlohy očima českých učitelů 1. stupně ZŠ	36
2.2.2 Obtíže českých žáků 1. stupně se slovními úlohami v testování	38
2.3 Metodologie.	42
2.3.1 Výběr úloh	42
2.3.2 Účastníci výzkumu a analýza dat.	49
2.4 Výsledky pro úlohy z 1. až 3. ročníku a jejich diskuse	52
2.4.1 Celkové výsledky – úspěšnost	53
2.4.2 Porozumění textu a uchopení úlohy.	55
2.4.3 Slova ve funkci antisignálu.	68
2.4.4 Stavby a jejich transformace v zadání slovních úloh na porovnání	73
2.4.5 Soubory a jejich části	80
2.4.6 Matematické „řemeslo“	83
2.5 Výsledky pro úlohy ze 4. a 5. ročníku a jejich diskuse	87
2.5.1 Celkové výsledky	87
2.5.2 Uchopování slovní úlohy a matematizace slovní úlohy	88
2.5.3 Zápis úloh, obrázky a modelování	93
2.5.4 Porozumění textu a jazykové překážky.	98
2.5.5 Úlohy s antisignálem	104
2.5.6 „Řetězení“ početních operací a informací v zadání	108

2.5.7 Zlomek ve slovní úloze	112
2.5.8 Numerické chyby a chyby v algoritmech (viz také oddíl 2.4.6)	120
2.5.9 Převody jednotek	124
2.6 Závěr	127

3. Konstrukční úlohy v řešeních žáků napříč ročníky základní školy

(Nadřa Vondrová a Radka Havlíčková)	133
3.1 Teoretický rámec	134
3.2 Konstrukční úlohy v české škole	137
3.2.1 Konstrukční úlohy očima českých učitelů	137
3.2.2 Obtíže českých žáků u konstrukčních úloh v testování	139
3.3 Metodologie.	143
3.3.1 Účastníci výzkumu.	143
3.3.2 Výběr úloh pro žáky 4. a 5. ročníku	144
3.3.3 Výběr úloh pro žáky 2. stupně základní školy.	147
3.3.4 Analýza dat	148
3.4 Výsledky	150
3.4.1 Celkové výsledky	150
3.4.2 Teoretický prostor versus prostor reprezentací	152
3.4.3 Uvažování v prototypch	159
3.4.4 Znalost termínů versus chápání pojmů, čtení textu s geometrickými značkami	165
3.4.5 Role náčrtku a postupu konstrukce v řešení žáků	173
3.4.6 Kvalita rýsování	174
3.4.7 Učitelé očekávané obtíže u úlohy 2.3	175
3.5 Závěr a diskuse	176

4. Zlomky – obtíže žáků 2. stupně a jejich možné příčiny

(Miroslav Rendl)	181
4.1 Teoretický rámec a související výzkum	181
4.1.1 Konceptuální a procedurální znalosti	183
4.1.2 Různé významy zlomků.	187
4.2 Zlomky v české škole.	188
4.2.1 Zlomky v kurikulu základní školy	188
4.2.2 Zlomky očima českých učitelů	189
4.2.3 Čeští žáci a zlomky	192
4.3 Metodologie.	192
4.3.1 Účastníci výzkumu.	192
4.3.2 Výběr úloh a analýza dat.	194
4.4 Výsledky	196
4.4.1 Slovní úlohy	197
4.4.2 Úlohy na číselné ose.	213
4.5 Diskuse.	227

4.5.1 Subkoncepty zlomku – vymezení pojmů	227
4.5.2 Chápání zlomku a jeho různých významů u našich žáků.	230
4.6 Závěr	250

5. Obtíže žáků 2. stupně ve zjišťování obsahu útvarů a objemů těles

(Nad'a Vondrová)	253
5.1 Teoretický rámec	254
5.2 Související výzkum	259
5.2.1 Obtíže žáků v oblasti míry v geometrii.	259
5.2.2 Problémy vyučování míry v geometrii zmiňované ve výzkumech z oddílu 5.2.1	262
5.3 Obsah a objem v české škole	263
5.3.1 Problematika míry v geometrii očima učitelů	263
5.3.2 Problémy českých žáků v oblasti míry v geometrii v testování	264
5.4 Metodologie.	268
5.4.1 Účastníci výzkumu	268
5.4.2 Výběr úloh	268
5.4.3 Průběh rozhovorů a analýza dat.	271
5.5 Výsledky a jejich diskuse	272
5.5.1 Celkové výsledky – úspěšnost žáků v řešení jednotlivých úloh	273
5.5.2 Interpretace obrázku – narušení vazby mezi teoretickým a prostorově-grafickým prostorem	275
5.5.3 Pokrývání roviny a vyplňování prostoru	276
5.5.4 Tendence k okamžitému použití vzorců pro míru	282
5.5.5 Reakce na použití nesprávného vzorce – kalkulativní oprava vzorce	283
5.5.6 Formální znalost vzorců	286
5.5.7 Úvaha versus použití vzorců.	288
5.5.8 Obsah obdélníku a trojúhelníku.	294
5.5.9 Porozumění pojmu objem a použití vzorců pro objem	298
5.5.10 Převody jednotek.	303
5.5.11 Matematická terminologie	307
5.6 Výzkumná sonda – úlohy na obsah zadané obrázkem	310
5.7 Závěr	316

6. Počátky algebraické činnosti: algebraizace a algebraické úpravy

v řešeních žáků 2. stupně (Jana Žalská)	319
6.1 Teoretická východiska a související výzkum.	320
6.1.1 Prealgebraické základy	323
6.1.2 Specifika algebraické činnosti	324
6.2 Algebra v české škole.	328
6.2.1 Algebraické schopnosti a dovednosti českých žáků očima učitelů.	328
6.2.2 Algebraizace a práce s algebraickými výrazy u českých žáků v mezinárodním testování TIMSS a PISA	330

6.3 Metodologie – algebraizace	332
6.3.1 Účastníci výzkumu	332
6.3.2 Výběr úloh, sběr a analýza dat	332
6.4 Výsledky – Algebraizace	338
6.4.1 Celková úspěšnost a jednotlivé úlohy	338
6.4.2 Potřeba konkrétnosti, provedení výpočtu	353
6.4.3 Dosazení konkrétních hodnot jako strategie řešení	355
6.4.4 Jazyková reprezentace: pojmy, procesy a vztahy	356
6.4.5 Algebraická reprezentace vztahu: reálný kontext	358
6.4.6 Reprezentace vztahu: rozlišení proměnných	362
6.4.7 Reprezentace vztahu: geometrický kontext	364
6.5 Metodologie – Úpravy algebraických výrazů	368
6.5.1 Úpravy algebraických výrazů: účastníci výzkumu	368
6.5.2 Výběr úloh, sběr a analýza dat	368
6.6 Výsledky – Úpravy algebraických výrazů	372
6.6.1 Celková úspěšnost a jednotlivé úlohy	372
6.6.2 Závorky	379
6.6.3 Operace s proměnnými a jejich mocninami	386
6.6.4 Záporná čísla a znaménko minus	390
6.7 Diskuse	391
6.7.1 Proměnná a algebraické vyjádření vztahů	391
6.7.2 Úpravy algebraických a číselných výrazů	394
6.8 Závěr	397

7. Obtížná místa matematiky základní školy

(Miroslav Rendl a Naďa Vondrová)	401
7.1 Uchopení textu	402
7.2 Matematizace	403
7.3 Nové učivo jako přechod od konkrétních k abstraktním reprezentacím	405
7.4 Zápisy, nákresy, náčrtky	407
7.4.1 Žáci si dělají poznámky, nikoli zápisy	407
7.4.2 Grafické znázornění je pro žáky nástroj pro vysvětlení, nikoli pro řešení	408
7.5 Závěr	410

8. Literatura

9. Přílohy	427
9.1 Konstruktivní úlohy pro 2. stupeň	427
9.2 Zlomky pro 2. stupeň	429
Úlohy s obrázky	429
Úlohy o cenách	430
Úlohy s koláči	430
Úlohy na číselné ose	431

Pokyny pro tazatele	433
9.3 Úlohy z oblasti míra v geometrii pro 2. stupeň	434
9.4 Úlohy z algebry	435
9.4.1 Úlohy sady A (algebraizace pro 6. a 7. ročník)	435
9.4.2 Úlohy sady B (algebraizace pro 8. a 9. ročník)	437
9.4.3 Úlohy sady C (úpravy výrazů)	439
9.5 Přehled žáků účastnících se rozhovorů	441
9.5.1 Slovní úlohy pro 1. stupeň	442
9.5.2 Konstrukční úlohy pro 1. stupeň	445
9.5.3 Konstrukční úlohy pro 2. stupeň	445
9.5.4 Zlomky pro 2. stupeň	446
9.5.5 Míra v geometrii pro 2. stupeň	447
9.5.6 Algebraizace pro 2. stupeň	448
9.5.7 Úpravy algebraických výrazů pro 2. stupeň	448
Summary	451
Jmenný rejstřík	453
Věcný rejstřík	459

/1/

Vybraná kritická místa matematiky – zkoumání žakovských obtíží

Nada Vondrová a Miroslav Rendl

Problematika výuky matematiky a výsledků našich žáků v matematice je v popředí zájmu nejen zainteresovaných odborníků již po řadu let. Přispívají k tomu i výsledky mezinárodních testování z matematiky, v nichž se ukazuje, že porozumění žáků matematickým pojmům není dobré. Diskutuje se o tom, jak tento stav změnit. Hovoří se o potřebě změnit způsob výuky, i když o povaze této změny nepanuje shoda. Jisté však je, že k nápravě situace neexistuje „královská cesta“ formou jednoduchých návodů. Do hry se dostává celá řada faktorů, počínaje žákem a jeho osobnostními a kognitivními charakteristikami, přes učitele a jeho styl výuky až po postoj veřejnosti k matematickému vzdělávání. Jisté také je, že je potřebné získávat co nejvíce informací o tom, v čem vlastně spočívá podstata problému. Existuje nějaká oblast (oblasti), v které mají žáci zejména obtíže? Dají se jejich obtíže odstranit lepším vysvětlováním nebo napsáním lepší učebnice? Laická veřejnost i někteří učitelé se domnívají, že stačí žáky více motivovat. Je tomu tak? Jaký typ motivace přináší pozitivní výsledky? Takových otázek si můžeme položit celou řadu. V této knize se snažíme poskytnout čtenáři hlubší pohled na jeden aspekt problematiky, a sice žakovské obtíže v oblastech, které jejich učitelé sami označili jako

obtížné. Problematice jsme se věnovali i dříve. V hloubkových rozhovorech, jejichž výsledky jsou shrnuty v knize (Rendl, Vondrová a kol., 2013), se dotazování učitelé vyjadřovali nejen k tomu, jakým způsobem obtížím žáků didakticky čelí, ale také zmiňovali pravděpodobné příčiny těchto obtíží. Obtíže však popisovali spíše obecně, proto jsme se je rozhodli prozkoumat přímo s žáky.

1.1 TŘI ZDROJE VÝZKUMU PREZENTOVANÉHO V KAPITOLÁCH KNIHY

Předložená kniha do jisté míry sumarizuje výsledky získané v rámci projektu GA ČR *Kritická místa matematiky základní školy, analýza didaktických praktik učitelů* ze tří vzájemně provázaných oblastí.

Za prvé se jedná o sekundární analýzy výsledků mezinárodního srovnávacího výzkumu TIMSS 2007 z matematiky pro 8. ročník (Rendl, Vondrová, 2014) a analýzy obecných výsledků výzkumů TIMSS z jiných let a výzkumu PISA. Zejména na základě této analýzy jsme získali konkrétní poznatky o tom, jaké typy úloh jsou pro naše žáky obtížné.

Za druhé se jedná o výsledky realizace hloubkových rozhovorů se zkušenými učiteli základní školy, jejichž primárním cílem bylo zjistit, jaké oblasti matematiky základní školy považují pro naše žáky za tzv. kritické. Jde o oblasti, v nichž žáci často a opakovaně selhávají, jinak řečeno, které nezvládnou na takové úrovni, aby se jejich matematická gramotnost produktivně rozvíjela a aby mohla být tvořivě užívána v každodenním životě. Vycházeli jsme z toho, že zkušení učitelé matematiky a učitelé 1. stupně si za léta praxe vytvořili soubor didaktických praktik, které považují za účinné. Výsledky jsme shrnuli v monografii (Rendl, Vondrová a kol., 2013). Učitelé jako kritické identifikovali vesměs ty oblasti, které se jako kritické objevily i v mezinárodních srovnávacích výzkumech, ale také některé nové (např. konstrukční úlohy).

Za třetí jsme připravili a realizovali kvantitativní šetření formou online dotazníku pro učitele 1. stupně a učitele matematiky žáků nižších sekundárních škol. Jeho hlavním cílem bylo do jisté míry verifikovat zjištění z rozhovorů s učiteli. V první části dotazníku se učitelé měli vyjadřovat k různým výroků¹ týkajícím se kritických oblastí matematiky na čtyřstupňové škále od „Určitě souhlasím“ až po „Určitě nesouhlasím“. Ve druhé části byly zařazeny otevřené otázky. Učitelé se měli vyjádřit ke konkrétním úlohám a napsat, jakých nejčastějších chyb se budou žáci daného věku pravděpodobně dopouštět. Zatímco první a druhá část byla odlišná pro učitele 1. stupně a učitele matematiky 2. stupně, poslední část dotazníku byla společná. V ní byly položeny otázky týkající se vlivu dílčích psychologických a sociálních faktorů na úspěch v matematice (např. působení rodiny a školy, nadání, motivace, pocitu osobní kom-

1 Konkrétní výroky jsou uvedené u jednotlivých kapitol v knize.

petence žáka) a parametrů výuky (např. vztahu výuky k praktickému životu, způsobu prezentace látky, využívání domácích úkolů). Část otázek se týkala také rozdílů mezi dívkami a chlapci a s nimi spojených stereotypů (např. co se týče sebedůvěry v matematice, postojů k ní, nadání, píle). Učitelé se opět vyjadřovali na škálách postihujících míru souhlasu nebo příklonu k jednomu z faktorů tvořících bipolární škály.

Informace o dotazníku byla zaslána elektronicky na všechny základní školy a osmiletá gymnázia v České republice a dále o něm byli informováni konkrétní učitelé, s nimiž mají řešitelé projektu kontakt. Od června do září 2014 jsme získali cca 645 vyplněných dotazníků od učitelů 1. stupně a cca 280 od učitelů matematiky (viz tab. 1.1). Počet učitelů, kteří vyplnili jednotlivé položky dotazníku, kolísal od 570 do 645 v případě učitelů 1. stupně a od 248 do 280 v případě učitelů matematiky nižšího stupně sekundárního vzdělávání. Konkrétní počty jsou uvedeny v jednotlivých kapitolách u příslušných položek.

Tab. 1.1: Respondenti online dotazníku pro učitele 1. stupně a učitele matematiky²

	Učitelé 1. stupně	Učitelé matematiky 2. stupně
Aprobovaní učitelé	88 %	89 %
Délka praxe		
do 5 let	12 %	8 %
více než 5 let až 10 let	8 %	12 %
více než 10 let až 20 let	31 %	31 %
více než 20 let až 30 let	35 %	34 %
více než 30 let	15 %	16 %

Vyhodnocení dotazníku není předmětem této knihy, nicméně v jednotlivých kapitolách využíváme jeho dílčích výsledků jako další zdroj informací o tom, jak o zkoumaných tématech uvažují učitelé z hlediska porozumění žáků i svých didaktických přístupů. Na použitý dotazník se v kapitolách odkazujeme jako na „online dotazník“.

1.2 CÍL A METODY VÝZKUMU

Cílem výzkumu bylo identifikovat povahu obtíží, které mají čeští žáci 1. a 2. stupně v těch oblastech školské matematiky, které námi dotazovaní učitelé považují za kritické (viz oddíl 1.3.1).

Při zvažování vhodné metody výzkumu jsme brali v úvahu, že se musí jednat o výzkum kvalitativní, při němž se dozvíme od daného respondenta co

2 Součet není chybou zaokrouhlení 100 %. Skladba délky praxe je u obou stupňů škol pozoruhodně podobná.

nejvíce informací o jeho řešitelském procesu. Samotné písemné řešení žáka k tomu účelu nepostačuje, neboť neobsahuje jednoznačné informace o jednotlivých krocích postupu žáka, o míře jeho počátečního vhledu do úlohy, o zkusmých krocích, momentech, kdy nabyl vhledu do průběhu řešení, apod. Proto jsme se rozhodli pro hloubkové rozhovory,³ v rámci nichž budou žáci řešit předložené úlohy a budou popisovat své myšlenkové pochody; využíváme tedy techniku myšlení nahlas, in-akční metodu verbalizace (Janík, 2005). Ve shodě s charakteristikou hloubkového rozhovoru v (Švaříček a kol., eds., 2007, s. 159) pomocí něj usilujeme o získání stejného pochopení jednání (v našem případě uvažování o matematice), jako mají žáci s obtížemi v matematice.

Hloubkové rozhovory s žáky nad řešeními úloh a úkolů nejen z matematiky se objevují i v českém pedagogickém výzkumu, i když ne příliš často. Např. V. Najvarová (2014) zkoumala rozvoj čtenářských dovedností u žáků 1. stupně. M. Tichá a A. Hošpesová (2005) na základě hloubkových rozhovorů usuzovaly na příčiny obtíží žáků 4. ročníku u řešení vybraných úloh TIMSS 1995. M. Krátká (2010) a J. Cihlář, P. Eisenmann a M. Krátká (2013) formou rozhovorů zjišťovali, jak žáci různého věku chápou pojem nekonečno. P. Eisenmann, J. Novotná a J. Příbyl (2015) použili metodu rozhovoru jako doplňkovou metodu při zjišťování, jak jsou žáci schopni používat jeden určitý typ heuristické strategie při řešení úloh. Podstatnou složkou jsou hloubkové rozhovory v dalších výzkumech (i když se neomezují jen na tuto techniku), např. (Hejný, 1995; Hejný, 2004).

Výše uvedený cíl konkretizujeme do dvou výzkumných otázek:

- Jaké obtíže vykazují žáci příslušného věku při řešení úloh ze zkoumaného tématu?
- Jaké jsou pravděpodobné příčiny těchto obtíží a nakolik odpovídají jevům popisovaným ve výzkumných studiích? Lze v případech shody usuzovat také na podobné příčiny, které jsou uváděny v odborné literatuře?

Předložená kniha sumarizuje společný výzkum, na němž se podíleli řešitelé projektu GAČR a který má společnou metodologii. Proto ji v této úvodní kapitole podrobněji uvedeme s tím, že kapitoly budou popisovat metodologii jen stručně (jen do té míry, aby tvořily samostatný celek, který je možné číst zvlášť) a doplní ji o další informace specifické pro dané téma. Z toho důvodu se v knize nemůžeme vyhnout jistému opakování informací.

3 Ve shodě s (Švaříček a kol., eds., 2007) budeme používat termín rozhovor, i když se často používá termín interview (Hendl, 2008).

1.3 METODOLOGIE

1.3.1 VÝBĚR TÉMAT A TVORBA ÚLOH

Na základě výsledků rozhovorů s učiteli (Rendl, Vondrová a kol., 2013) jsme vybrali témata pro rozhovory s žáky uvedená v tab. 1.2.

Tab. 1.2: Matematická témata vybraná pro výzkum s žáky

	1. stupeň ZŠ	2. stupeň ZŠ
Aritmetika	Slovní úlohy	Zlomky
Algebra		Algebraické modelování a úpravy algebraických výrazů
Geometrie	Konstrukční úlohy	
		Míra v geometrii (obsah, objem)

Přirozeně nebylo v naší moci prozkoumat všechny oblasti, které se v rozhovorech s učiteli ukázaly jako obtížné, museli jsme se omezit jen na některé z nich. Přitom jsme vycházeli také z výsledků mezinárodních srovnávacích studií. Např. učitelé obou stupňů škol v rozhovorech zmiňovali jako problematická desetinná čísla. Ovšem sekundární analýzou úloh TIMSS 2007 a úspěšnosti našich žáků v nich jsme zjistili (Rendl, Vondrová, 2014), že v šesti úlohách z domény Číslo, v nichž se pracuje s desetinnými čísly, mají naši žáci výsledky v průměru 20 % nad mezinárodním průměrem. Jen v pěti úlohách, v nichž jsou desetinná čísla užívána v kombinaci se zlomky, klesá odstup od mezinárodního průměru na český standard + 9 %. Takže žádná úloha s desetinnými čísly nepatří mezi námi vymezené slabé úlohy a ve výzkumu jsme se nadále soustředili spíše na problémy českých žáků se zlomky (v sadě pro 2. stupeň).

Slovní úlohy byly široce tematizované jako problematická oblast jak učiteli 1. stupně, tak učiteli 2. stupně. Nicméně v rozhovorech jsme je explicitně použili jako samostatnou sadu jen u 1. stupně. U 2. stupně jsou slovní úlohy součástí sad úloh pro zlomky (kap. 4), míru v geometrii (kap. 5) i algebru (kap. 6), kde jsou také vyvozeny patřičné závěry.

Učitelé matematiky se shodli na tom, že žáci mají výrazné problémy ve zjišťování obsahů útvarů a objemů těles. Tematizovali je v souvislosti s algebraickými výrazy a vůbec s uchopováním problémů kolem nás pomocí algebry. Stejně zjištění přinesla i zmiňovaná sekundární analýza TIMSS 2007. Proto se v rozhovorech s žáky podrobně věnujeme oběma oblastem.

Poslední oblastí, kterou jsme se zabývali, byla problematika konstrukčních úloh. Ta jediná se neobjevuje v mezinárodních srovnávacích výzkumech (protože tam žádné úlohy konstrukčního typu nejsou zařazovány), ani jí není věnována prakticky žádná výzkumná pozornost, a to ani v zahraničí. Učitelé obou stupňů škol však konstrukční úlohy jako problematické místo zmiňovali